ГОУ ВПО РОССИЙСКО-АРМЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Составлен в соответствии с государственными требованиями к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников по направлению 01.03.02 Прикладная математика и информатика и Положением «Об УМКД РАУ».

УТВЕРЖДАЮ:
Директор института математики и информатики
к.ф.-м.н.,
Дарбинян Арман Араикович
"19" 07 2023г.

Институт Математики и информатики

Кафедра: Математической кибернетики

Автор(ы): д.ф.-м.н., профессор **Атабекян Варужан Сергеевич**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

Дисциплина: Б1.О.05 «Алгебра и геометрия»

Направление: «Прикладная математика и информатика» 01.03.02

ЕРЕВАН

1. **Аннотация**

Алгебра издревле составляла существенную часть математики. Современная алгебра определяется как наука об алгебраических операциях, выполняемых над элементами различных множеств. Сами алгебраические операции выросли из элементарной арифметики. В свою очередь на основе алгебраических соображений получаются наиболее естественные доказательства многих фактов из ,высшей арифметики, - теории чисел.

Но значение алгебраических структур – множеств с алгебраическими операциями, далеко выходит за рамки теоретико-числовых применений. Многие математические объекты (топологические пространства, дифференциальные уравнения, функции нескольких комплексных переменных и др.) изучаются путем построения надлежащих алгебраических структур, отражающих их существенные стороны. Алгебраические средства весьма полезны при исследовании элементарных частиц в квантовой механике, свойств твердого тела и кристаллов, при анализе модельных задач экономики при конструировании современных компьютеров, в програмировании и т.д.

<u>Требования к исходным уровням знаний и умений студентов:</u>
От студентов требуется знание школьного курса математики.

2. **Содержание**

2.1. Целью изучения дисциплины является изучение некоторых основных понятий алгебры и теории чисел, обобщения классических понятий для колец главных идеалов, ознакомление с понятиями группы и ее графа Келли, конечных полей и минимальных подполей, а также с некоторыми классическими алгоритмическими вопросами алгебры и теории чисел, повышение уровня знаний и умений в области алгебры и теории чисел.

2.2. Требования к уровню освоения содержания дисциплины.

После прохождения дисциплины студент должен:

знать:
основные определения и теоремы курса.

уметь:
решать системы линейных уравнений;вычислить определители, применить векторные методы в аналитической геометрии и линейной алгебре, работать с векторными пространствами, группами, классическими полями, кольцами, в частности - кольцами

матриц и кольцом многочленов; работать с линейными преобразованиями, уметь находить жорданову форму линейного преобразования над C; уметь приводить квадратичную форму к диагональному виду; применять методы аналитической геометрии и алгебры к решению задач смежных дисциплин.

владеть:

основными понятиями аналитической геометрии и линейной алгебры, способами составления уравнений геометрических фигур,основам теории систем линейных уравнений, определителей, теории многочленов, линейных пространств и линейных преобразований, квадратичных форм, основами теории групп, колец., классических полей.

2.3. Трудоемкость дисциплины и виды учебной работы по учебному плану

Виды учебной работы	Всего, в акад. часах			
		Распределение по семестрам		
		1	2	3
1. **Общая трудоемкость изучения дисциплины по семестрам , в т. ч.:**	504	180	180	144
1.1. Аудиторные занятия, в т. ч.:	288			
1.1.1. Лекции	144	54	54	36
1.1.2. Практические занятия, в т. ч.	144	54	54	36
1.1.2.1. Обсуждение прикладных проектов				
1.1.2.2. Кейсы				
1.1.2.3. Деловые игры, тренинги				
1.1.2.4. Контрольные работы				
1.1.3. Семинары				
1.1.4. Лабораторные работы				
1.1.5. Другие виды аудиторных занятий				
1.2. Самостоятельная работа, в т. ч.:	90	36	9	45
1.2.1. Подготовка к экзаменам				
1.2.2. Другие виды самостоятельной работы, в т.ч. (можно указать)				
1.2.2.1. Письменные домашние задания				
1.2.2.2. Курсовые работы				
1.2.2.3. Эссе и рефераты				
1.3. Консультации				
1.4. Другие методы и формы занятий (контроль)	90	36	27	27
1.3 Кредиты	13	5	4	4
Итоговый контроль (Экзамен,Зачет, диф. зачет/указать)	экзамен	экзамен	экзамен	экзамен

2.4. Распределение объема дисциплины по темам и видам учебной работы

Разделы и темы дисциплины	Всего ак. часов	Лекции, ак. часов	Практ. занятия, ак. часов	Семина-ры, ак. часов	Лабор, ак. часов	Другие виды занятий, ак. часов
Модуль 1. Системы линейных уравнений. Перестановки и подстановки.		**10**	**10**			
Раздел 1. Системы линейных уравнений.						
Тема 1.1. Системы линейных уравнений. Прямоугольные матрицы.		4	4			
Тема 1.2. Приведение матриц и систем линейных уравнений к ступенчатому виду. Метод Гаусса.		2	2			
Раздел 2. Перестановки и подстановки						
Тема 2.1. Перестановки и подстановки, их количество и четность. Транспозиции, циклы. Функция знака подстановки.		4	4			
Модуль 2. Матрицы и определители.		**22**	**22**			
Тема 1.1. Формула определителя и его простейшие свойства.		4	4			
Тема 1.2. Разложение определителя по строке и по столбцу.		2	2			
Раздел 2.Ранг матрицы						
Тема 2..1. Линейная зависимость и независимость строк или столбцов.		2	2			
Тема 2.2.Ранг системы векторов.		4	4			
Тема 23. Теорема о ранге матрицы.		2	2			
Тема 2.4. Теорема Кронекера – Капелли.		1	1			
Раздел 3.Умножение матриц						
Тема 3.1. Ассоциативность умножения матриц.		1	1			
Тема 3.2. Определитель произведения матриц.		2	2			
Тема 3.3. Формула обратной матрицы. Вычисление обратной матрицы элементарными образованиями.Теорема Крамера.		4	4			
Модуль 3. Поле комплексных чисел и кольцо многочленов.		**22**	**22**			
Тема 1.1. Построение поля комплексных чисел.		2	2			
Тема 1.2. Тригонометрическая форма комплексных чисел.		2	2			
Тема 1.3. Возведение в степень и извлечение корня.		2	2			
Раздел 2. Кольца целых чисел и многочленов						
Тема 2.1. Понятие делимости в кольцах целых чисел и многочленов, простые элементы.		4	4			
Тема 2.2. Деление с остатком.		2	2			
Тема 2.3. Наибольший общий делитель, алгоритм Евклида.		2	2			
Тема 2.4. Однозначность разложения на простые множители.		2	2			
Раздел 3.Корни многочленов						

Тема 3.1. Теорема Безу. Кратность корня, ее понижение при дифференцировании.		4	4			
Тема 3.2. Неприводимые многочлены с комплексными и действительными коэффициентами.		2	2			
Модуль 1. Векторы на плоскости и в пространстве. Плоскость и прямая в пространстве.		**26**	**26**			
Раздел 1. Векторы и точки на плоскости и в пространстве.						
Тема 1.1. Операции над векторами. Линейная зависимость и независимость, коллинеарность и компланарность.		2	2			
Тема 1.2. Базисы, аффинная система координат. Координаты векторов и точек. Длина вектора и расстояние между точками.		1	1			
Тема 1.3. Скалярное произведение векторов. Векторное произведение векторов.		3	3			
Тема 1.4. Смешанное произведение векторов.		2	2			
Раздел 2. Прямая на плоскости. Плоскость и прямая в пространстве.						
Тема 2.1. Различные виды уравнения прямой на плоскости.		2	2			
Тема 2.2. Различные виды уравнения плоскости в пространстве.		2	2			
Тема 2.3. Взаимное расположение прямых и плоскостей.		2	2			
Раздел 3. Линейные пространства						
Тема 3.1. Линейные пространства. Линейная зависимость векторов.		3	3			
Тема 3.2 Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора в базисе.		3	3			
Тема 3.3 Подпространства линейного пространства, линейные оболочки, действия над пространствами.		3	3			
Тема 3.4 Факторпространство. Изоморфизм линейных пространств.		3	3			
Модуль 2. Линейные отображения векторных пространств, Жорданова нормальная форма.		**12**	**12**			
Раздел 1. Линейные отображения векторных пространств,						
Тема 1.1 Линейные отображения векторных пространств. Образ и ядро линейного отображения.		2	2			
Тема 1.2 Алгебра линейных операторов векторного пространства. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису.		2	2			
Раздел 2. Жорданова нормальная форма.						
Тема 2.1. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристический многочлен.		2	2			
Тема 2.2. Теорема Гамильтона - Кэли. Минимальный аннулирующий многочлен.		1	1			

Тема 2.3Разложение пространства в прямую сумму корневых подпространств линейного оператора.		2	2			
Тема 2.4 Существование и единственность жордановой нормальной формы комплексной матрицы.		3	3			
Модуль 3. Билинейные и квадратичные формы. Кривые и поверхности второго порядка.		**14**	**14**			
Раздел 1. **Билинейные и квадратичные формы.**						
Тема 1.1. Билинейные функции и формы, их матрицы. Симметрические и кососимметрические билинейные функции и формы.		1	1			
Тема 1.2. Приведение квадратичных форм к каноническому виду. Закон инерции		3	3			
Тема 1.3 Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра..		3	3			
Тема 1.4. Евклидово пространство. Процесс ортогонализации Грама - Шмидта, ортонормированные базисы.		2	2			
Раздел 2. Канонические уравнения кривых и поверхностей второго порядка.						
Тема 2.1. Кривые второго порядка, их классификация.		2	2			
Тема 2.2. Поверхности второго порядка, их классификация.		3	3			
Модуль 1.Основные факты о строении групп		**14**	**14**			
Тема 1.1. Группы, подгруппы, изоморфизм групп. Теорема Кэли. Теорема Лагранжа.		4	4			
Тема 1.2. Порядок элемента, циклические Группы и их подгруппы.		3	3			
Тема 1.3Нормальные подгруппы. Фактор-группы. Теорема о гомоморфизмах групп.		4	4			
Тема 1.4 Действие группы на множестве. Стационарные подгруппы и орбиты.		3	3			
Модуль 2.Идеалы колец, фактор кольца		**14**	**14**			
Тема 2.1. Идеалы колец, Фактор-кольца. Теорема о гомоморфизмах колец		3	3			
Тема 2.2. Простые и максимальные идеалы..		4	4			
Тема 2.3. Теоремы Ферма и Эйлера. Функция Эйлера. Китайская теорема.		4	4			
Модуль 3. Характеристика поля. Простые подполя.		**10**	**10**			
Тема 1.1 Характеристика поля. Простые поля. Простое алгебраическое расширение полей.		4	4			
Тема 1.2. Поле разложение многочлена. Конечные поля.		6	6			

2.5. Содержание разделов и тем дисциплины:

Модуль 1.
1. Системы линейных уравнений. Прямоугольные матрицы. Приведение матриц и систем линейных уравнений к ступенчатому виду. Метод Гаусса.
2. Перестановки и подстановки конечного множества, знак подстановки (четность), знакопеременная группа, разложение подстановки в произведение транспозиций и независимых циклов.

Модуль 2.
3. Определитель квадратной матрицы, его основные свойства. Формула разложения определителя матрицы по строке (столбцу). Определитель Вандермонда.
4. Операции над матрицами и их свойства. Определитель произведения матриц Ассоциативность умножения матриц. Дистрибутивность. Определитель произведения квадратных матриц. Обратная матрица, ее явный вид (формула), способ выражения с помощью элементарных преобразований строк. Связь элементарных преобразований матриц с умножением на элементарные матрицы. Теорема Крамера о системах линейных уравнений с квадратной матрицей.
5. Линейная зависимость строк (столбцов). Основная лемма о линейной зависимости, база и ранг системы строк (столбцов). Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. Критерий совместности и определенности системы линейных уравнений в терминах рангов матриц. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Теорема о ранге произведения двух матриц.

Модуль 3.
6. Поле комплексных чисел, геометрическое изображение, алгебраическая и тригонометрическая форма записи, извлечение корней, корни из единицы. Теорема Гаусса об алгебраической замкнутости поля комплексных чисел.
7. Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Возможность и единственность деления на ненулевой многочлен с остатком. Наибольший общий делитель двух многочленов, его выражение через многочлены, алгоритм Евклида. Факториальность кольца многочленов и кольца целых чисел. Неприводимые многочлены над вещественным и комплексным полями. Формулы Виета.
8. Корни многочлена. Формальная производная, ее свойства, снижение кратности неприводимого множителя (корня) при дифференцировании. Интерполяционный многочлен, формула Лагранжа и метод Ньютона для его построения. Поле рациональных дробей. Представление правильной рациональной дроби в виде суммы простейших дробей, случай вещественного и комплексного полей.

Линейные пространства.

Модуль 1.
1. Векторы и точки на плоскости и в пространстве**.**Операции над векторами. Линейная зависимость и независимость, коллинеарность и компланарность. Базисы, аффинная система координат. Координаты векторов и точек. Длина вектора и расстояние между точками.Скалярное произведение векторов. Векторное произведение векторов.. Смешанное произведение векторов. Прямая на плоскости. Плоскость и прямая в пространстве. Различные виды уравнения прямой на плоскости. Различные виды уравнения плоскости в пространстве.. Взаимное расположение прямых и плоскостей.
2. Линейные пространства. Линейная зависимость векторов. Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора в базисе. Переход от одного базиса к другому, матрица перехода, связь между координатами вектора в разных базисах. Изоморфизм линейных пространств одинаковой размерности.
3. Подпространства линейного пространства, линейные оболочки, действия над пространствами: пересечение, объединение, сумма. Прямая сумма линейных подпространств. Факторпространство. Изоморфизм линейных пространств.

Модуль 2.
4. Линейные отображения векторных пространств. Образ и ядро линейного отображения. Размерность ядра и образа. Критерий инъективности. Матричное задание. Сопряженное линейное пространство, дуальные базисы. Второе сопряженное пространство, канонический изоморфизм.

5. Алгебра линейных операторов векторного пространства. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису. Определитель, след и ранг линейного оператора. Обратимость и невырожденность.
6. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристический многочлен и характеристические корни. Теорема Гамильтона - Кэли. Минимальный аннулирующий многочлен, спектр и условия диагонализируемости линейного оператора.
7. Разложение пространства в прямую сумму корневых подпространств линейного оператора. Существование и единственность жордановой нормальной формы комплексной матрицы.

Модуль 3.
8. Билинейные функции и формы, их матрицы. Ранг билинейной функции. Симметрические и кососимметрические билинейные функции и формы. Положительно определенные квадратичные функции. Квадратичные функции и формы, их матрицы. Приведение квадратичных форм к каноническому виду методом Лагранжа. Закон инерции для вещественных квадратичных форм. Метод Якоби. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
9. Канонические уравнения кривых и поверхностей второго порядка. Кривые второго порядка, их классификация. Поверхности второго порядка, их классификация.
10. Евклидово пространство. Процесс ортогонализации Грамма - Шмидта, ортонормированные базисы. Ортогональное дополнение линейного подпространства. Метрический изоморфизм Евклидовых пространств одинаковой размерности. Определитель Грамма. Неравенство Коши - Буняковского. Геометрия евклидовых пространств: расстояния, углы, объемы.

Абстрактная алгебра
Модуль 1.
1. Группы, подгруппы, изоморфизм групп. Порядок элемента. Циклические группы, их подгруппы.Изоморфизм циклических групп одинакового порядка. Разложение группы по подгруппе. Теорема Лагранжа о группах и ее следствия. Порождающие множества. Порождающие множества симметрических, знакопеременных и линейных групп. Теорема Кэли о представлении группы подстановками.
2. Нормальные подгруппы. Фактор-группы. Гомоморфизмы групп. Теорема о гомоморфизмах групп.
3. Действие группы на множестве. Стационарные подгруппы и орбиты. Классы сопряженных элементов группы.

Модуль 2.
1. Идеалы колец, Фактор-кольца. Теорема о гомоморфизмах колец.
2. Простые и максимальные идеалы. Кольцо целых гауссовых чисел.
3.Теорема Ферма. Теорема Вильсона. Функция Эйлера. Китайская теорема об остатках.

Модуль 3.
1. Характеристика поля. Простые подполя. Простое алгебраическое расширение полей.
2. Поле разложение многочлена. Конечные поля.

2.6. Распределение весов по формам контроля

Формы контролей	Веса форм текущих контролей в результирующих оценках текущих контролей	Веса форм промежуточных контролей в оценках промежуточных контролей	Веса оценок промежуточных контролей и результирующих оценок текущих контролей в итоговых оценках промежуточных контролей	Веса итоговых оценок промежуточных контролей в результирующей оценке промежуточных контролей	Веса результирующей оценки промежуточных контролей и оценки итогового контроля в результирующей оценке итогового контроля

Вид учебной работы/контроля	**М1**[1]	**М 2**	**М 3**	**М 1**	**М 2**	**М 3**	**М 1**	**М2**	**М3**		
Контрольная работа					1	1					
Тест											
Курсовая работа											
Лабораторные работы											
Письменные домашние задания		1	1								
Реферат											
Эссе											
Другие формы (Указать)											
Другие формы (Указать)											
Веса результирующих оценок текущих контролей в итоговых оценках промежуточных контролей								0.5	0.5		
Веса оценок промежуточных контролей в итоговых оценках промежуточных контролей								0.5	0.5		
Вес итоговой оценки 1-го промежуточного контроля в результирующей оценке промежуточных контролей											
Вес итоговой оценки 2-го промежуточного контроля в результирующей оценке промежуточных контролей										0.5	
Вес итоговой оценки 3-го промежуточного контроля в результирующей оценке промежуточных контролей										0.5	
Вес результирующей оценки промежуточных контролей в результирующей оценке итогового контроля											0.4
Экзамен/зачет (оценка итогового контроля)											0.6 (Экзамен/Зачет)
	∑ = 1	**∑ = 1**	**∑ = 1**	**∑ = 1**	**∑ = 1**	**∑ = 1**	**∑ = 1**	**∑ = 1**	**∑ = 1**	**∑ = 1**	**∑ = 1**

3. Рекомендуемая литература

1. Винберг Э.Б., Курс алгебры, М., Факториал Пресс, 2001.
2. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. М., Наука, 1984.
3. Кострикин А.И., Введение в алгебру, М., Наука, 1977.
4. Кострикин А.И., Введение в алгебру, ч. I, М., Физико-математическая литература, 2000.
5. Кострикин А.И., Манин Ю. Линейная алгебра и геометрия. 1982г.
6. Курош А.Г., Курс высшей алгебры, М., Наука, 1971
7. Сборник задач по алгебре (под ред. Кострикина А.И.), М., Физико-математическая литература, 2001.

а) Базовый учебник*

Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. М., Наука, 1984.

[1] Учебный Модуль

б) Основная литература

1. Винберг Э.Б., Курс алгебры, М., Факториал Пресс, 2001.
2. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. М., Наука, 1984.
3. Кострикин А.И., Введение в алгебру, М., Наука, 1977.
4. Курош А.Г., Курс высшей алгебры, М., Наука, 1971

в) Дополнительная литература

1. Кострикин А.И., Введение в алгебру, ч. I, М., Физико-математическая литература, 2000.
2. Кострикин А.И., Манин Ю. Линейная алгебра и геометрия. 1982г.
3. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

Учебная программа одобрена кафедрой Математической кибернетики.

Зав. кафедрой: Арамян Р.Г ______________________

(подпись)